

Démonstration de la question 1.c

Énoncé : Montrer que pour tout $t \geq 0$, la solution $y(t)$ de l'équation différentielle

$$y'(t) = P(y),$$

où $P(y) = 2548y^3 - 15295y^2 + 20157y - 6030$, reste confinée dans $I = [1, 3]$.

Démonstration

1. Cadre de l'équation différentielle.

L'équation différentielle est donnée par :

$$y'(t) = P(y),$$

et la condition initiale est $y(0) = 2$. Nous devons montrer que $y(t) \in I = [1, 3]$ pour tout $t \geq 0$.

2. Analyse qualitative de $P(y)$ dans $I = [1, 3]$.

2.1. Signe de $P(y)$ aux bornes de I .

- **À $y = 1$:** Si $y(t)$ atteint $y = 1$, alors $y'(t) = P(1)$. Cela signifie que la dynamique de $y(t)$ en ce point est déterminée par la valeur de $P(1)$. En remplaçant $y = 1$ dans $P(y)$, nous obtenons :

$$P(1) = 2548 \cdot 1^3 - 15295 \cdot 1^2 + 20157 \cdot 1 - 6030 = 2548 - 15295 + 20157 - 6030 > 0.$$

Ainsi, si $y(t) = 1$, alors $y'(t) > 0$. Cela implique que $y(t)$ commence à augmenter, ce qui maintient $y(t) \in I$.

- **À $y = 3$:** Si $y(t)$ atteint $y = 3$, alors $y'(t) = P(3)$. En remplaçant $y = 3$ dans $P(y)$, nous obtenons :

$$P(3) = 2548 \cdot 3^3 - 15295 \cdot 3^2 + 20157 \cdot 3 - 6030 < 0.$$

Ainsi, si $y(t) = 3$, alors $y'(t) < 0$. Cela implique que $y(t)$ commence à diminuer, ce qui maintient $y(t) \in I$.

2.2. Comportement général dans I .

- Si $y(t) > 1$, alors $y(t)$ ne peut pas sortir de I par $y < 1$, car $P(1) > 0$.

- Si $y(t) < 3$, alors $y(t)$ ne peut pas sortir de I par $y > 3$, car $P(3) < 0$.

Ainsi, tant que $y(t) \in I$, la dynamique de $P(y)$ garantit que $y(t)$ reste confinée dans I .

3. Argument global de confinement.

L'équation différentielle garantit que $y'(t)$ agit comme une "force de rappel" vers l'intérieur de I aux bornes $y = 1$ et $y = 3$. En appliquant le théorème d'existence et d'unicité des solutions (Cauchy-Lipschitz), toute solution $y(t)$ définie à partir de $y(0) = 2 \in I$ reste dans I pour tout $t \geq 0$.

4. Monotonie et existence de la limite.

Nous avons montré précédemment que toute solution $y(t)$ est monotone.

- Une fonction monotone bornée converge.
- Comme $y(t) \in [1, 3]$ pour tout $t \geq 0$, $y(t)$ admet une limite :

$$\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t).$$

De plus, cette limite appartient à $I = [1, 3]$.

Conclusion

$y(t) \in [1, 3]$ pour tout $t \geq 0$, grâce aux propriétés analytiques de $P(y)$. La limite $\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ existe et est dans $I = [1, 3]$. \square