

### 3.d

$P'(y)$  n'admet pas de racine dans  $I$ , car  $x_1 \approx 0,83$  et  $x_2 \approx 3,16$ . Donc,  $P(y)$  est décroissante sur  $I$  et admet comme maximum  $P(1) = 1380$  et comme minimum  $P(3) = -14418$ .

On a :

$$y_{n+1} = y_n + h \times P(y_n).$$

Pour garantir  $y_{n+1} \in I$ , les deux inégalités doivent être vérifiées :

1.  $y_{n+1} \geq 1$        $y_n + h \times P(y_n) \geq 1$ ,
2.  $y_{n+1} \leq 3$        $y_n + h \times P(y_n) \leq 3$ .

$$1. y_{n+1} \geq 1 : y_n + h \times P(y_n) \geq 1 = h \times P(y_n) \geq 1 - y_n.$$

- Si  $P(y_n) > 0$  :

$$h \geq \frac{1 - y_n}{P(y_n)}.$$

- Si  $P(y_n) < 0$  :

$$h \leq \frac{1 - y_n}{P(y_n)} = \frac{y_n - 1}{|P(y_n)|}.$$

$$2. y_{n+1} \leq 3 : y_n + h \times P(y_n) \leq 3 = h \times P(y_n) \leq 3 - y_n.$$

- Si  $P(y_n) > 0$  :

$$h \leq \frac{3 - y_n}{P(y_n)}.$$

- Si  $P(y_n) < 0$  :

$$h \geq \frac{3 - y_n}{P(y_n)} = \frac{y_n - 3}{|P(y_n)|}.$$

On obtient donc :

1.  $P(y_n) < 0$  :

$$\frac{y_n - 3}{|P(y_n)|} \leq h \leq \frac{y_n - 1}{|P(y_n)|}.$$

$$0 < h \leq \frac{2}{14418}.$$

2.  $P(y_n) > 0$  :

$$\frac{1 - y_n}{P(y_n)} \leq h \leq \frac{3 - y_n}{P(y_n)}.$$

On remplace  $y_n$  par 1 car c'est le maximum sur  $I$  :

$$0 < h \leq \frac{2}{1380}.$$

En fusionnant les deux inégalités, on obtient :

$$0 < h \leq \frac{2}{14418} \leq \frac{2}{1380}.$$

Donc :

$$0 < h \leq \frac{2}{14418}.$$

Enfin,  $h_0 \in ]0; \frac{2}{14418}]$ .