

Démonstration de la question 1.b

Énoncé : Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = P(y),$$

où $P(y) = 2548y^3 - 15295y^2 + 20157y - 6030$, est monotone.

Démonstration

1. **Cas où $y(t)$ est constante.**

Si $y(t) = \theta$ est une solution constante de l'équation, alors $y'(t) = P(\theta)$. Comme θ est constante, nous avons :

$$y'(t) = 0.$$

Cela implique $P(\theta) = 0$, donc θ est une racine de $P(y)$. Dans ce cas, $y(t) = \theta$ est une solution constante de l'équation. Toute fonction constante est monotone, ce qui vérifie l'énoncé dans ce cas.

2. **Cas où $y(t)$ n'est pas constante.**

Supposons maintenant que $y(t)$ n'est pas constante. L'équation $y'(t) = P(y)$ nous indique que :

Le signe de $y'(t)$ est donné par le signe de $P(y(t))$.

Ainsi :

- Si $P(y(t)) > 0$, alors $y'(t) > 0$, ce qui implique que $y(t)$ est strictement croissante.
- Si $P(y(t)) < 0$, alors $y'(t) < 0$, ce qui implique que $y(t)$ est strictement décroissante.

Dans ces deux cas, $y(t)$ conserve une monotonie stricte.

Conclusion

Dans tous les cas, la solution $y(t)$ est soit constante (si elle atteint une racine de $P(y)$), soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Par conséquent, toute solution de l'équation différentielle est monotone. \square